**问题描述：卡塔兰数，是组合数学中一个常出现在各种计数问题中出现的数列。输入一个整数n，计算h(n)。其递归式如下：h(n)= h(0)\*h(n-1)+h(1)\*h(n-2) + ... + h(n-1)h(0) (其中n>=2，h(0) = h(1) = 1)    该递推关系的解为：h(n)=C(2n,n)/(n+1) (n=1,2,3,...)**

思路：直接根据递归式，写出相应的算法。

        参考代码：

**[cpp]** [view plaincopyprint?](http://blog.csdn.net/wuzhekai1985/article/details/6764858)

1. //函数功能: 计算Catalan的第n项
2. //函数参数: n为项数
3. //返回值:   第n个Catalan数
4. **int** Catalan(**int** n)
5. {
6. **if**(n <= 1)
7. **return** 1;
9. **int** \*h = **new** **int** [n+1]; //保存临时结果
10. h[0] = h[1] = 1;        //h(0)和h(1)
11. **for**(**int** i = 2; i <= n; i++)    //依次计算h(2),h(3)...h(n)
12. {
13. h[i] = 0;
14. **for**(**int** j = 0; j < i; j++) //根据递归式计算 h(i)= h(0)\*h(i-1)+h(1)\*h(i-2) + ... + h(i-1)h(0)
15. h[i] += (h[j] \* h[i-1-j]);
16. }
17. **int** result = h[n]; //保存结果
18. **delete** [] h;       //注意释放空间
19. **return** result;
20. }

**应用1描述：n对括号有多少种匹配方式？**

       思路：n对括号相当于有2n个符号，n个左括号、n个右括号，可以设问题的解为f(2n)。第0个符号肯定为左括号，与之匹配的右括号必须为第2i+1字符。因为如果是第2i个字符，那么第0个字符与第2i个字符间包含奇数个字符，而奇数个字符是无法构成匹配的。

       通过简单分析，f(2n)可以转化如下的递推式 f(2n) = f(0)\*f(2n-2) + f(2)\*f(2n - 4) + ... + f(2n - 4)\*f(2) + f(2n-2)\*f(0)。简单解释一下，f(0) \* f(2n-2)表示第0个字符与第1个字符匹配，同时剩余字符分成两个部分，一部分为0个字符，另一部分为2n-2个字符，然后对这两部分求解。f(2)\*f(2n-4)表示第0个字符与第3个字符匹配，同时剩余字符分成两个部分，一部分为2个字符，另一部分为2n-4个字符。依次类推。

       假设f(0) = 1，计算一下开始几项，f(2) = 1, f(4) = 2, f(6) = 5。结合递归式，不难发现**f(2n) 等于h(n)**。

**应用2描述：矩阵链乘： P=a1×a2×a3×……×an，依据乘法结合律，不改变其顺序，只用括号表示成对的乘积，试问有几种括号化的方案？**

       思路：可以这样考虑，首先通过括号化，将P分成两个部分，然后分别对两个部分进行括号化。比如分成(a1)×(a2×a3.....×an)，然后再对(a1)和(a2×a3.....×an)分别括号化；又如分成(a1×a2)×(a3.....×an)，然后再对(a1×a2)和(a3.....×an)括号化。

       设n个矩阵的括号化方案的种数为f(n)，那么问题的解为

        f(n) = f(1)\*f(n-1) + f(2)\*f(n-2) + f(3)\*f(n-3) + f(n-1)\*f(1)。f(1)\*f(n-1)表示分成(a1)×(a2×a3.....×an)两部分，然后分别括号化。

       计算开始几项，f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 5。结合递归式，不难发现**f(n)等于h(n-1)**。

**应用3描述：一个栈(无穷大)的进栈序列为1，2，3，…，n，有多少个不同的出栈序列?**

      思路：这个与加括号的很相似，进栈操作相当于是左括号，而出栈操作相当于右括号。n个数的进栈次序和出栈次序构成了一个含2n个数字的序列。第0个数字肯定是进栈的数，这个数相应的出栈的数一定是第2i+1个数。因为如果是2i，那么中间包含了奇数个数，这奇数个肯定无法构成进栈出栈序列。

       设问题的解为f(2n)， 那么f(2n) = f(0)\*f(2n-2) + f(2)\*f(2n-4) + f(2n-2)\*f(0)。f(0) \* f(2n-2)表示第0个数字进栈后立即出栈，此时这个数字的进栈与出栈间包含的数字个数为0，剩余为2n-2个数。f(2)\*f(2n-4)表示第0个数字进栈与出栈间包含了2个数字，相当于1 2 2 1，剩余为2n-4个数字。依次类推。

       假设f(0) = 1，计算一下开始几项，f(2) = 1, f(4) = 2, f(6) = 5。结合递归式，不难发现**f(2n) 等于h(n)**。

**应用4描述：n个节点构成的二叉树，共有多少种情形？**

       思路：可以这样考虑，根肯定会占用一个结点，那么剩余的n-1个结点可以有如下的分配方式，T(0, n-1),T(1, n-2),...T(n-1, 0)，设T(i, j)表示根的左子树含i个结点，右子树含j个结点。

       设问题的解为f(n)，那么f(n) = f(0)\*f(n-1) + f(1)\*f(n-2) + .......+ f(n-2)\*f(1) + f(n-1)\*f(0)。假设f(0) = 1，那么f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 5。结合递推式，不难发现**f(n)等于h(n)**。

**应用5描述：在圆上选择2n个点，将这些点成对连接起来使得所得到的n条线段不相交的方法数？**

       思路：以其中一个点为基点，编号为0，然后按顺时针方向将其他点依次编号。那么与编号为0相连点的编号一定是奇数，否则，这两个编号间含有奇数个点，势必会有个点被孤立，即在一条线段的两侧分别有一个孤立点，从而导致两线段相交。设选中的基点为A，与它连接的点为B，那么A和B将所有点分成两个部分，一部分位于A、B的左边，另一部分位于A、B的右边。然后分别对这两部分求解即可。

       设问题的解f(n)，那么f(n) = f(0)\*f(n-2) + f(2)\*f(n-4) + f(4)\*f(n-6) + ......f(n-4)\*f(2) + f(n-2)\*f(0)。f(0)\*f(n-2)表示编号0的点与编号1的点相连，此时位于它们右边的点的个数为0，而位于它们左边的点为2n-2。依次类推。

       f(0) = 1, f(2) = 1, f(4) = 2。结合递归式，不难发现**f(2n) 等于h(n)**。

**应用6描述：求一个凸多边形区域划分成三角形区域的方法数？**

      思路：以凸多边形的一边为基，设这条边的2个顶点为A和B。从剩余顶点中选1个，可以将凸多边形分成三个部分，中间是一个三角形，左右两边分别是两个凸多边形，然后求解左右两个凸多边形。

      设问题的解f(n)，其中n表示顶点数，那么f(n) = f(2)\*f(n-1) + f(3)\*f(n-2) + ......f(n-2)\*f(3) + f(n-1)\*f(2)。f(2)\*f(n-1)表示三个相邻的顶点构成一个三角形，那么另外两个部分的顶点数分别为2和n-1。

      设f(2) = 1，那么f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 5。结合递推式，不难发现**f(n) 等于h(n-2)**。

**应用7描述：有2n个人排成一行进入剧场。入场费5元。其中只有n个人有一张5元钞票，另外n人只有10元钞票，剧院无其它钞票，问有多少中方法使得只要有10元的人买票，售票处就有5元的钞票找零？**

     思路：可以将持5元买票视为进栈，那么持10元买票视为5元的出栈。这个问题就转化成了栈的出栈次序数。由应用三的分析直接得到结果，**f(2n) 等于h(n)**。